# Aufgabe 12

## a)

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, x \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Wir führen nun eine Substitution $y = x - \mu$ durch...

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, (y+\mu) \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

...und stellen fest, dass das erste Integral punktsymmetrisch zum Ursprung ist. Das Integral über $\mathbb{R}$ ist demnach null. Das zweite Integral entspricht gerade der Normierten Gauss-Funktion und ergibt deswegen 1.

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, y \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=0} + \mu \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=1} = \mu$$

## b)

Mit der gleichen Substitution gelangen wir zu

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle (x-\mu)^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$$

Einetzen liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, y^2 \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

Da es sich hierbei um ein zur y-Achse symmetrisches Integral handelt, können wir auch schreiben

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{0}^{+\infty} dy\, y^2 \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

und das ist ein Standardintegral (siehe Bronstein) der Form $\int\limits_0^\infty dx\ x^n \cdot e^{a \cdot x^2}$ und dessen Lösung $\frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1} \cdot a^{k+\frac{1}{2}}}$ für $n = 2k$ für unseren Fall:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot 1}{4 \cdot (2\sigma^2)^{-\frac{3}{2}}} = \sigma^2$$