

Theoretische Physik D - Übungsblatt 6

Philipp Jung

02.06.2006

Aufgabe 14

a)

Bei dem zu berechnenden Integral handelt es sich um die Gesamtwahrscheinlichkeit das Teilchen zu treffen, diese sollte natürlich eins sein!

$$\int_{\mathbb{R}} dx \Psi^* \Psi = N^2 \int_{\mathbb{R}} dx e^{i\phi} e^{-i\phi} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

Wir substituieren $y = x - x_0$ und formen das Integral leicht um, so dass es die Form einer Normierten Gauss-Glocke annimmt:

$$= N^2 \underbrace{\sqrt{2\pi\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=1} = N^2 \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

Wir setzen nun noch einmal σ ein, setzen den Term gleich eins und erhalten:

$$\alpha = 2\pi^3$$

als Bedingung für eine normierte Wellenfunktion. (Diese Bedingung setzen wir nun in allen weiteren Teilaufgaben voraus)

b)

Hier sollen zunächst die Unschärfe des Orts und des Impulses berechnet werden. Anschaulich ist klar, dass $\langle x \rangle = x_0$ also der Erwartungswert des Ortes gleich dem Zentrum des Wellenpaketes ist sowie $\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} = \sigma$ die Unschärfe gleich der Breite des Wellenpaketes ist. Da hier aber explizit nach deren Berechnung gefragt ist, berechnen wir sie eben noch einmal ★★★
Zunächst substituieren wir allerdings direkt: $y = x - x_0$

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 N^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = 2N^2 \int_0^{\infty} dy y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

Letzteres Integral lösen wir wie auf dem letzten Übungsblatt:

$$= 2N^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4(2\sigma^2)^{-3/2}} = N^2 \sqrt{2\pi} \sigma^3 = \underbrace{N^2 \sqrt{2\pi\sigma^2}}_{=1 \text{ siehe a)}} \sigma^2$$

und erhalten für die Ortsunschärfe

$$\Delta x = \sigma = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2} t^2}{\alpha}}$$

Für die Impulsunschärfe betrachten wir die Fouriertransformierte $\Phi(p, t)$, da wir im Impulsraum den Mittelwert viel eleganter ausrechnen können. Die Fouriertransformation leiten wir uns aus der in Aufgabe 6 gegebenen Form der Wellenfunktion her, da diese fast einer Fourier-Rücktransformation entspricht! Aus der Rücktransformationsform

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk \sqrt{2\pi} e^{-\alpha(k-k_0)^2} e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t} e^{ikx}$$

Aus dieser Form lässt sich nun die Fouriertransformierte ablesen:

$$\Phi(k, t) = \sqrt{2\pi} e^{-\alpha(k-k_0)^2} e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t}$$

Erwartungsgemäß finden wir dann für den Erwartungswert von p:

$$\langle p \rangle = \langle \hbar k \rangle = \int_{\mathbb{R}} dk \Phi^* \hbar k \Phi \stackrel{y=k-k_0}{=} \underbrace{2\pi\hbar \int_{\mathbb{R}} dy y e^{-2\alpha y^2}}_{=0} + 2\pi\hbar k_0 \underbrace{\sqrt{\frac{2\pi}{4\alpha}} \sqrt{\frac{4\alpha}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dy e^{-2\alpha y^2}}_{=1} = \hbar k_0 = p_0$$

und für

$$\langle (p - p_0)^2 \rangle = \langle \hbar^2 (k - k_0)^2 \rangle = \langle \hbar^2 y^2 \rangle = \hbar^2 2\pi 2 \int_0^{\infty} dy y^2 e^{-2\alpha y^2}$$

und wieder das gleiche Standardintegral, dass wir schon des öfteren benutzt haben...

$$= \hbar^2 2\pi \frac{\sqrt{\pi}}{(2\alpha)^{3/2}} = \frac{\hbar^2}{2\alpha}$$

Somit haben wir nun auch die Impulsunschärfe gefunden:

$$\Delta p = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\alpha}} = \frac{\hbar}{2\sqrt{\alpha}}$$

Für das Produkt $\Delta x \cdot \Delta p$ finden wir nun schlussendlich

$$\Delta x \cdot \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar^4}{4m^2\alpha^2}t^2} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Aufgabe 16

Zunächst bestimmen wir die Ortsunschärfe, indem wir die Breite des Beugungsbildes bestimmen. Diese ist für eine Punktquelle (wovon wir einfach näherungsweise ausgehen)

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin(\Theta)}$$

Da bei dem Stoß Impulserhaltung gilt, gehen wir davon aus, dass das Elektron je nach Versatz einen Teil des Impulses des Photons (den Impuls finden wir über die Materiewellenlänge-Impuls Beziehung $p = \frac{h}{\lambda}$) Die gesuchte x-Komponente des Impulses finden wir über einfache Trigonometrie:

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \sin(\Theta)$$

Für das Produkt der beiden Unschärfen gilt dann:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x = h$$

Aufgabe 17

Nach den Gesetzen der klassischen Mechanik lautet die Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen $x = v_0 \cdot t + x_0$. In unserem Fall ist x_0 der Mittelwert von x zum Zeitpunkt $t=0$ und $p_0 = \frac{v_0}{m}$ der Mittelwert des Impulses zum Zeitpunkt $t=0$. also ist:

$$\langle x \rangle_{t>0} = \frac{\langle p \rangle_{t=0}}{m} \cdot t + \langle x \rangle_{t=0}$$

und da wir ein freies Teilchen haben

$$\langle p \rangle_{t>0} = \langle p \rangle_{t=0}$$

Für $\langle x \rangle$ und $\langle p \rangle$ bzw. deren Standardabweichungen Δx und Δp bei $t=0$ gilt

$$\begin{aligned}\langle x \rangle_{t=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx x f(x, p) \\ \langle p \rangle_{t=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} dp p f(x, p) \\ \Delta x_{t=0} &= \sqrt{\langle x^2 \rangle_{t=0} - \langle x \rangle_{t=0}^2} \\ \Delta p_{t=0} &= \sqrt{\langle p^2 \rangle_{t=0} - \langle p \rangle_{t=0}^2}\end{aligned}$$

Somit sollte für die Standardabweichungen ein ähnliches Verhältnis gelten wie für die Mittelwerte:

$$\begin{aligned}\Delta p_{t>0} &= \Delta p_{t=0} \\ \Delta x_{t>0} &= \frac{\Delta p_{t=0}}{m} \cdot t + \Delta x_{t=0}\end{aligned}$$

Quantenmechanisch müssten eigentlich x und p beide zerfließen aber in unserem klassischen Fall wird (zumindest anschaulich) der Mittelwert und die Standardabweichung des Impulses über die Zeit konstant bleiben, wohingegen die Ortsunschärfe immer weiter zunimmt.