Theoretische Physik E im WS 07/08
Übungsblatt 1

Philipp Jung

6. November 2007

Aufgabe 1

Die "alte Quantentheorie" von Bohr und Sommerfeld

a)

Begründung:
Gegeben ist ein Periodisches System. Das heisst Anfangspunkt und Endpunkt einer Periode im Phasenraum sind identisch. Die Bahnkurve schliesst eine geschlossene Fläche B im Phasenraum mit Randkurve K ein. $\vec{r} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ sei "Ortsvektor" im Phasenraum und $\vec{f}(q,p) = \begin{pmatrix} p(q) \\ 0 \end{pmatrix}$ so folgt aus der Definition des Gauss'schen Satzes in 2 Dimensionen

$$\oint_K \vec{f}\, d\vec{r} = \int_B \left(\frac{\partial f_2}{\partial q} - \frac{\partial f_1}{\partial p} \right) dB$$

angewandt

$$\oint_K p\, dq = -B$$

Das Minus kommt durch den Umlaufsinn ;-)

b)

Die Energie des klassischen, eindimensionalen harmonischen Oszillators im gegebenen Potential lässt sich schreiben als:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Wir machen uns nun unser Wissen aus Teilaufgabe a) zunutze: Die Energiegleichung lässt sich in eine Ellipse im Phasenraum umschreiben:

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} = 1$$

Da wir ja nun wissen, dass die Fläche der Ellipse gerade S ist und für eine Ellipse der Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ diese Fläche bekanntermaßen $A_{Ellipse} = \pi ab$ ist, können wir nun S schreiben als:

$$S = A_{Ellipse} = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot \sqrt{2mE} \cdot \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \frac{2\pi E}{\omega} \stackrel{!}{=} 2\pi\hbar n$$

Daraus können wir die quantisierte Energie ablesen:

$$E_n = \hbar n \omega$$

c)

Die Lagrangefunktion eines Teilchens in einer Ebene mit rotationssymmetrischem Potential kann man in Polarkoordinaten schreiben als

$$\mathfrak{L}(r,\phi) = T(r,\phi) - U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r)$$

Den kanonisch konjugierten Impuls p_q zu einer verallgemeinerten Koordinate q findet man in der Lagrange'schen Mechanik über $p_q = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}}$.Der zu ϕ kanonisch konjugierte Impuls ist also:

$$p_\phi = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}$$

Der verallgemeinerte Impuls p_q einer koordinate q ist erhalten, wenn $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} = 0$ gilt. Bei uns also

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow p_\phi = const$$

Dass es sich hierbei um den Drehimpuls handelt, können wir erkennen, wenn wir diesen in Zylinderkoordinaten schreiben:

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \overset{zyl.}{=} m\{(r\hat{e}_r) \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi)\} = mr^2\dot{\phi}\hat{e}_z$$

Der Betrag des Drehimpulses ist also genau gleich des gesuchten Impulses in der Ebene:

$$|\vec{L}| = mr^2\dot{\phi} = p_\phi$$

Nun wenden wir die Bohr-Sommerfeld-Quantisierung an. Dies ist besonders einfach, da $p_\phi = |\vec{L}| = L = const$:

$$\oint p_\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} L \, d\phi = 2\pi L \overset{!}{=} 2\pi\hbar n$$

Daraus ergibt sich eine Quantisierung des Drehimpulses:

$$L_n = \hbar n$$

Aufgabe 2

Hamilton-Jacobi-Theorie

a)

$$-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} = \underbrace{-\frac{\partial H}{\partial \tilde{q}}}_{=0} - \frac{\partial}{\partial \tilde{q}}\frac{\partial}{\partial t}F = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}} = \dot{\tilde{p}}$$

b)

Wenn wir den angegebenen Separationsansatz $S(q,E,t) = W(q,E) - Et$ wählen ergeben sich aus Aufgabenteil a) folgende Beziehungen:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$$

Eingesetzt in die Hamilton-Jacobi-Gleichung mit der gegebenen Hamiltonfunktion erhalten wir

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2-E=0$$

Nun können wir auflösen und W(q,E) durch speparation der Variablen bestimmen.

$$W(q,E)=\int\limits_{q_0}^{q}dq'\,\sqrt{2mE-m^2\omega^2q'^2}$$

c)

Wir verwenden den in Teilaufgabe b) eingeführten Separationsansatz und erhalten

$$T=-\frac{\partial S}{\partial E}=-\frac{\partial W}{\partial E}+t$$

Für W haben wir bereits eine Integrale Lösung in b) gefunden, die wir nun weiterverwenden. Der Übersicht halber berechnen wir zunächst $\frac{\partial W}{\partial E}$

$$\frac{\partial W}{\partial E}=\int\limits_{q_0}^{q}dq'\,\frac{m}{\sqrt{2mE-m^2\omega^2q'^2}}=\frac{1}{\omega}\int\limits_{q_0}^{q}dq'\,\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}-q'^2}}\overset{Bronstein}{=}\frac{1}{\omega}\left[arcsin\left(\frac{q'}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}\right)\right]_{q_0}^{q}$$

In unserem Fall können wir $q_0=0$ ansetzen und den gefundenen Ausdruck in unsere Ausgangsgleichung einstzen.

$$T=-\frac{1}{\omega}arcsin\left(\frac{q}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}\right)+t$$

und nach q auflösen:

$$q=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}sin\left(\omega\left(t-T\right)\right)$$

d)