Theoretische Physik E im WS 07/08
Übungsblatt 2

Philipp Jung

6. November 2007

Aufgabe 3: *Landau Niveaus*

Zunächst schreiben wir die Impulskomponenten des Hamiltonoperators

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)$$

um in Komponenten des kinetischen Impulses und des Vektorpotential. Hierbei verwenden wir,

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow A_3 = 0$$

dass die z-Komponente des Vektorpotentials verschwindet und für die Übrigen Komponenten gilt $A_1 = \frac{e_0 B}{2c} x_2$ bzw. $A_2 = -\frac{e_0 B}{2c} x_1$

$$p_1 = m\dot{x}_1^2 + \frac{e_0 B}{2c} \qquad p_2 = m\dot{x}_2^2 - \frac{e_0 B}{2c} \qquad p_3 = m\dot{x}_3^2$$

Eingesetzt in den Hamiltonoperator ergibt das

$$H = \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left[\left(m\dot{x}_1^2 + \frac{e_0 B}{2c} x_2\right)^2 + \left(m\dot{x}_2^2 - \frac{e_0 B}{2c} x_1\right)^2\right]$$

An dieser Stelle definieren wir die quantenmechanischen "Geschwindigkeitsoperatoren" $\dot{x}_1$ bzw. $\dot{x}_2$ über die linearkombination von Orts- und Impulsoperatoren:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{Be_0}{2c} x_2\right) \qquad \dot{x}_1 = \frac{1}{m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{Be_0}{2c} x_1\right)$$

Eingesetzt in den Hamiltonoperator und unter Beachtung der Vertauschungsrelationen

$$[x_i, x_j] = 0 \qquad [p_i, p_j] = 0 \qquad [x_i, p_i] = i\hbar$$

kann man diesen nun ausmultiplizieren und erhält

$$H = \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left[m^2\dot{x}_1^2 + \underbrace{\left(\frac{e_0 B}{2c}\right)^2 x_2^2 - \left(\frac{e_0 B}{2c}\right)^2 x_2^2}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{e_0 B}{2c}\right)^2 x_1^2 - \left(\frac{e_0 B}{2c}\right)^2 x_1^2}_{=0} + m^2\dot{x}_2^2\right]$$

$$H = \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2m}\frac{e_0 B}{c}\left(\underbrace{\frac{m^2\dot{x}_2^2}{\frac{e_0 B}{c}}}_{\pi_1^2} + \underbrace{\frac{m^2\dot{x}_1^2}{\frac{e_0 B}{c}}}_{\pi_2^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{e_0 B}{mc}\left(\pi_1^2 + \pi_2^2\right) + \frac{p_3^2}{2m}$$

Die Vertauschungsrelation $[\pi_1, \pi_2] = \pi_1\pi_2 - \pi_2\pi_1$ lässt sich aufgrund der Definition von π_1 und π_2 sehr einfach auf die Vertauschungsrelationen von p und x zurückführen:

$$[\pi_1, \pi_2] = \frac{c}{e_0 B}\left(\underbrace{[p_2, p_1]}_{=0} - \frac{Be_0}{2c}\underbrace{[p_2, x_2]}_{=-i\hbar} + \frac{Be_0}{2c}\underbrace{[x_1, p_2]}_{=i\hbar} - \left(\frac{Be_0}{2c}\right)^2\underbrace{[x_1, x_2]}_{=0}\right) = i\hbar$$

Nun haben wir
$H_s = \frac{1}{2}\omega_c\left(\pi_1^2 + \pi_2^2\right)$ mit $[\pi_1, \pi_2] = i\hbar$
auf die Form des Hamiltonoperators des quantenmechanischen harmonischen oszillators gebracht:
$H_{osz} = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{p^2}{\omega m} + m\omega x^2\right)$ mit $[\frac{p^2}{\sqrt{\omega m}}, \sqrt{m\omega}x^2] = i\hbar$
In Analogie zum harmonischen Oszillator ergeben sich die Energieeigenwerte von H_s zu

$$E_n = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Aufgabe 4: *Die semiklassische Näherung am Beispiel des harmonischen Oszillators*

b) Wir gehen mit dem gegeben Ansatz für Ψ

$$\Psi(q,t) = A(q)\cdot e^{\frac{i}{\hbar}(W(q)-Et)}$$

in die Schrödingergleichung

$$i\hbar\Psi(q,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(q)\right]\Psi(q,t)$$

ein. Aus dem Ergebnis

$$E\cdot A(q)\cdot e^{\frac{i}{\hbar}(W(q)-Et)}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2 A(q)}{\partial q^2} - \frac{A(q)}{\hbar^2}\left(\frac{\partial W(q)}{\partial q}\right)^2 - \frac{iA(q)}{\hbar}\frac{\partial^2 W(q)}{\partial q^2} + 2\frac{i}{\hbar}\frac{\partial A(q)}{\partial q}\frac{\partial W(q)}{\partial q} - \frac{2m}{\hbar^2}U(q)\cdot A(q)\right]e^{\frac{i}{\hbar}(W(q)-Et)}$$

können wir eine gleichung für A und W ablesen:

$$E\cdot A(q) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 A(q)}{\partial q^2}\frac{A(q)}{2m}\left(\frac{\partial W(q)}{\partial q}\right)^2 + \frac{i\hbar A(q)}{2m}\frac{\partial^2 W(q)}{\partial q^2} - \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial A(q)}{\partial q}\frac{\partial W(q)}{\partial q} + U(q)\cdot A(q)$$

Im Grenzfall $\hbar \to 0$ vereinfacht sich die Gleichung und wir erhalten

$$E\cdot A(q) = \frac{A(q)}{2m}\left(\frac{\partial W(q)}{\partial q}\right)^2 + U(q)\cdot A(q)$$

mit $\frac{\partial W(q)}{\partial q} = p$ die Klassische Energiegleichung zurück:

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

Wir können die oben erhaltene Gleichung aber auch in Real und Imaginärteil unterteilen und erhalten so zwei Gleichungen. Für den Realteil:

$$E\cdot A(q) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 A(q)}{\partial q^2}\frac{A(q)}{2m}\left(\frac{\partial W(q)}{\partial q}\right)^2 + U(q)\cdot A(q)$$

Dies lässt sich nicht einfach lösen. Und für den Imaginärteil

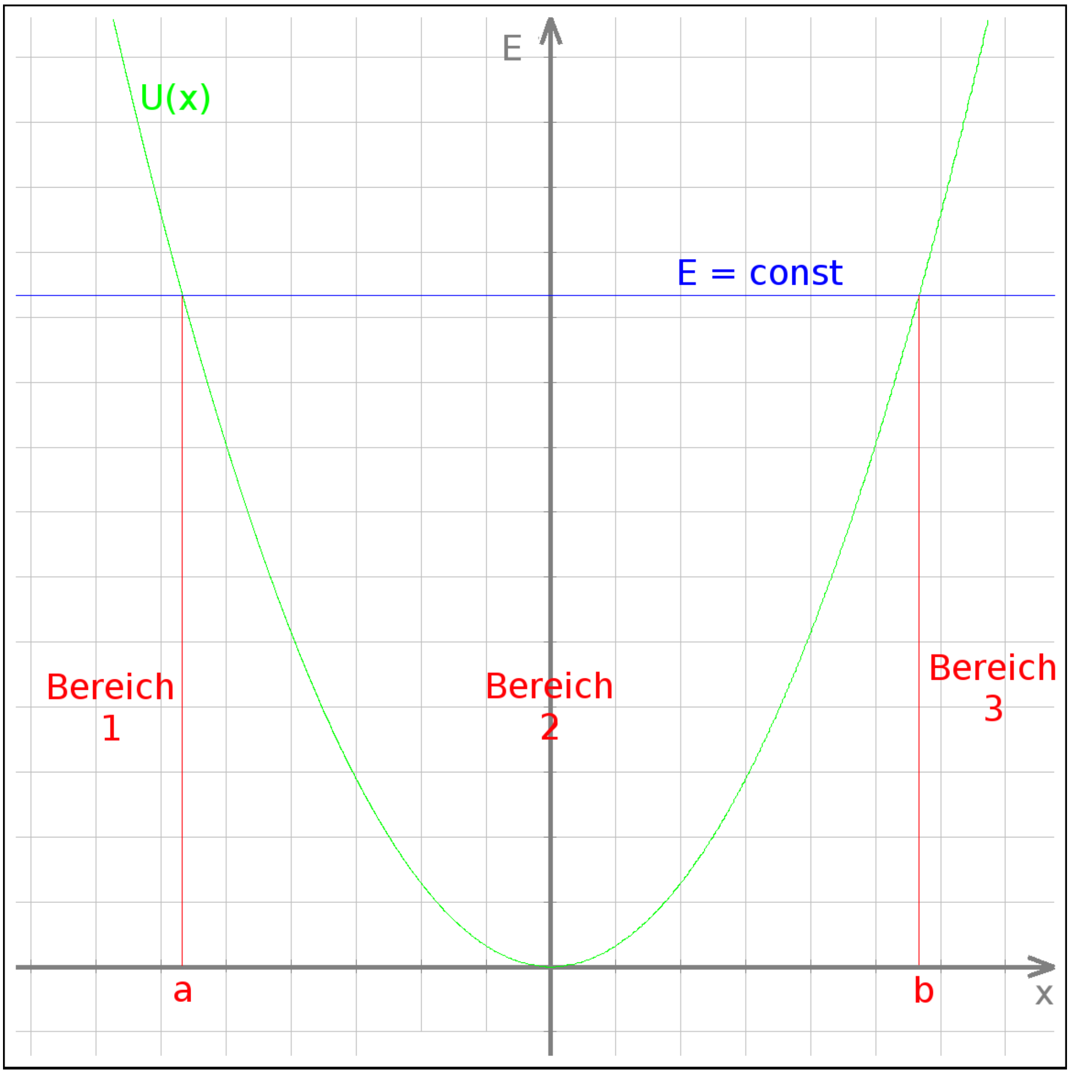
$$0 = \frac{i\hbar A(q)}{2m}\frac{\partial^2 W(q)}{\partial q^2} - \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial A(q)}{\partial q}\frac{\partial W(q)}{\partial q}$$

$$0 = \frac{A(q)}{2}\frac{\partial^2 W(q)}{\partial q^2} - \frac{\partial A(q)}{\partial q}\frac{\partial W(q)}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(A^2(q)\frac{\partial W(q)}{\partial q}\right) \Rightarrow A^2(q)\frac{\partial W(q)}{\partial q} = c \Rightarrow A = \frac{c}{\sqrt{\frac{\partial W(q)}{\partial q}}}$$

(Mit c=const als Integrationskonstante) Somit haben wir die Abhängigkeit von A von W bestimmt. Setzt man nun in die Wellenfunktion ein, so erhält man:

$$\Psi(q,t) = \frac{c}{\sqrt{\frac{\partial W(q)}{\partial q}}} e^{\frac{i}{\hbar}(W(q)-Et)} \Rightarrow |\Psi|^2 = \left|\frac{c}{\sqrt{\frac{\partial W(q)}{\partial q}}}\right|^2$$

c) Das Problem Graphisch:



Wir klassifizieren das Problem zunächst: In den Bereichen 1 und 3 erwarten wir eine exponentiell abfallende, im Bereich 2 eine oszillierende Wellenfunktion. Aus der Vorlesung kennen wir die Form der WKB-Lösungen. Aus den Bereichen 1 und 3 bekommen wir nun jeweils eine Anschlussbedingung für den Bereich 2:

$$
\begin{array}{lll}
Bereich 1 & x \ll a & Y_1 \approx \frac{c}{2}\sqrt{l'}e^{-\int\limits_x^a \frac{dx}{l'}} \\
Bereich 2 & a \ll x \ll b & Y_{2a} = c\sqrt{\lambda'}cos\left(\int\limits_a^x \frac{dx}{\lambda'} - \frac{\pi}{4}\right) \\
 & & Y_{2b} = c'\sqrt{\lambda'}cos\left(\int\limits_x^b \frac{dx}{\lambda'} - \frac{\pi}{4}\right) \\
Bereich 3 & x \gg b & Y_3 \approx \frac{c'}{2}\sqrt{l'}e^{-\int\limits_b^x \frac{dx}{l'}}
\end{array}
$$

wobei

$$l' = \frac{l}{2\pi} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V(x)-E)}} \qquad \lambda' = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E-V(x))}}$$

Um ein konsistentes System zu beschreiben müssen Y_{2a} und Y_{2b} gleich sein und wir erhalten folgende Bedingung (eine art Quantisierungsbedingung):

$$Y_{2a} = Y_{2b} \Rightarrow \int\limits_a^b \frac{dx}{\lambda'} = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$$

In diese Bedingung setzen wir ein:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$\lambda' = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)}}$$

$$a = -\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \qquad b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

und lösen das Integral (Bronstein)

$$\frac{m\omega}{\hbar}\int\limits_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}} dx\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2} = \frac{m\omega}{2\hbar}\left[x\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2} + \frac{2E}{m\omega^2}arcsin\left(\sqrt{\frac{x^2\omega^2 m}{2E}}\right)\right]_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}$$

Aufgrund der x-asymmetrie beider Terme kann man leicht vereinfachen:

$$= \frac{m\omega}{\hbar}\left[\frac{2E}{m\omega^2}\underbrace{arcsin(1)}_{=\frac{\pi}{2}}\right] \stackrel{!}{=} \left(N+\frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow E = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$$

Für die Anwendbarkeit der WKB-Näherung sind uns zwei Kriterien bekannt. Zunächst muss das Potential an den Schnittpunkten der Bereiche (also hier bei a und b) einigermaßen linear verlaufen, was hier auch der Fall ist. Die zweite Bedingung jedoch, dass die Wellenlänge des Systems λ klein sein muss gegenüber der Breite des Bereichs L , gilt nur für große N, da z.B. für N = 1 gilt $\lambda \approx L$

d) Ausgehend von der in c) benutzten Quantisierungsbedingung

$$2\pi\int\limits_a^b \frac{dx}{\lambda} = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$$

Nun verwenden wir die De-Broglie Beziehung $p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$

$$\int\limits_a^b p\,dx = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi\hbar$$

Wenn wir nun ein geschlossenes Interal haben wollen, laufen wir die Strecke ab einemal hin und noch mal zurück.

$$\oint\limits_a^b p\,dx = \left(N + \frac{1}{2}\right)2\pi\hbar = \underbrace{2\pi\hbar N}_{Bohr-Sommerfeld Quantisierung} + \underbrace{\pi\hbar}_{additive Konstante}$$

Für die Quantisierung der Energieniveaus sieht man, dass die Phasenraumfläche nie verschwindet und es deswegen eine Grundzustandsenergie gibt. Auch in Aufgabe 3 findet man eine Grundzustandsenergie.