

Theoretische Physik E im WS 07/08
Übungsblatt 4
Gruppe P

Philipp Jung

19. November 2007

Aufgabe 7: *Raum und Dualraum*

Wendet man die angegebenen Objekte auf ein weiteres Objekt des Zustandsraumes an, so bilden sie die folgenden Verknüpfungen:

$$\langle a | : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C} \quad |a\rangle \langle b| : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

Nun war nach Zeilen- und Spaltenzahl der weiter angegebenen Objekte gefragt. Ich gehe hier davon aus, dass der Raum \mathcal{V} n-Dimensional ist.

- $|a\rangle$: Ist ein Vektor in \mathcal{V} und hat demnach n Zeilen und eine Spalte.
- $\langle a|$: Ist ein Vektor im dualen Zustandsraum \mathcal{V}' und hat also eine Zeile und n Spalten.
- $\langle a|b\rangle$ ist dann das "Matrixprodukt" der beiden oberen Elemente und hat deswegen genau eine Zeile und eine Spalte. Es ist also ein Skalar.
- $|a\rangle \langle b|$ ist dann eine Matrix mit n Zeilen und n Spalten.

Aufgabe 8: *Projektion auf Unterraum und Schmidt-Verfahren*

In der Aufgabenstellung geht es darum, dass das Integral über die quadratische Differenz der beiden Funktionen ein Minimum haben soll. Wir suchen also das Polynom zweiten Grades, das die beste Näherung für die Funktion $f(x)$ darstellt. Wir können dieses Ziel nun auf mehreren Wegen erreichen, einer davon (hier gefordert) ist die Möglichkeit in einem geschickt konstruierten Raum in dem beide Funktionen existieren und von dem der Raum der Polynome zweiten Grades ein Unterraum ist, die Zielfunktion in den Polynomraum zu projizieren. Dem Hinweis folgend konstruieren wir uns einen 4-dimensionalen Funktionenraum, der aufgespannt wird durch die Funktionen $1, x, x^2$ sowie \sqrt{x} im Bereich $x \in (-1, 1)$. Beide Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind Funktionen in diesem Raum, von dem der Raum der Polynome 2. Grades ein Unterraum ist. Ein Skalarprodukt definieren wir in diesem Fall in Analogie zu dem uns Vertrauten Skalarprodukt im Funktionenraum

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x) dx$$

Mit den speziellen Voraussetzungen der Grenzen und der Einschränkung auf reelle Polynome können wir das Skalarprodukt also schreiben als

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

Um die oben beschriebene Projektion durchzuführen, müssen wir zunächst ein vollständiges System orthogonaler Basisvektoren in unserem Unterraum finden. Hierfür verwenden wir das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren. Die nicht-orthogonalen, nicht normierten Basisvektoren lauten $a_1 = 1$, $a_2 = x$ und $a_3 = x^2$.

Für den ersten Basisvektor

$$e_1 = a_1 = 1$$

und normiert:

$$\hat{e}_1 = \langle e_1, e_1 \rangle^{-\frac{1}{2}} e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Für den zweiten Basisvektor

$$e_2 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = x - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx}_{=0} = x$$

Normierung ergibt

$$\hat{e}_2 = \langle e_2, e_2 \rangle^{-\frac{1}{2}} e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} x$$

Für den dritten Basisvektor

$$e_3 = x^2 - \frac{1}{2} \frac{2}{3} - \underbrace{\frac{3}{2} \frac{1}{4} [x^4]_{-1}^1}_{=0} = x^2 - \frac{1}{3}$$

und normiert:

$$\hat{e}_3 = \left(\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx \right)^{-\frac{1}{2}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{8}{45} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{3\sqrt{10}}{4} x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}$$

Mit dieser Basis lässt sich nun die Projektion ausführen:

$$g(x) = \hat{P}^p f(x) = \sum_{i=1}^3 \hat{P}_i^p f(x) = \sum_{i=1}^3 \langle \hat{e}_i, f(x) \rangle \hat{e}_i$$

Zunächst also die drei Skalarprodukte, bei denen wir die Integration nur von 0 bis 1 durchführen müssen, da sonst per Definition $f(x) = 0$.

$$\langle \sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\langle \sqrt{x}, \sqrt{\frac{3}{2}} x \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$\langle \sqrt{x}, \frac{3\sqrt{10}}{4}(x^2 - \frac{1}{3}) \rangle = \frac{3\sqrt{10}}{4} \int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}\sqrt{x} \right) dx = \frac{3\sqrt{10}}{63}$$

Das können wir nun einsetzen und erhalten

$$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{3}{2}} x + \frac{3\sqrt{10}}{63} \frac{3\sqrt{10}}{4} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{14} x^2 + \frac{3}{5} x + \frac{3}{14}$$

Somit haben wir die Projektion $g(x)$ der Funktion $f(x)$ in den Raum der Polynome zweiten Grades gefunden, für die das gegebene Integral minimal wird.

Aufgabe 9: Direkte Summe von Vektorräumen

- a) Im Fall $V = U \oplus W$ (mit U n -dimensional, W m -dimensional und V demnach $(m+n)$ -dimensional) können wir aufgrund der Linearität die Einheit schreiben als

$$E = \sum_{i=1}^{m+n} |v_i\rangle \langle v_i| = E_U + E_W = \sum_{j=1}^n |u_j\rangle \langle u_j| + \sum_{k=1}^m |w_k\rangle \langle w_k|$$

Das können wir auf den Vektor $|v\rangle$ anwenden und erhalten

$$|v\rangle = E|v\rangle = \underbrace{\sum_{j=1}^n |u_j\rangle \langle u_j| v\rangle}_{=|u\rangle \in U} + \underbrace{\sum_{k=1}^m |w_k\rangle \langle w_k| v\rangle}_{=|w\rangle \in W} = |u\rangle + |w\rangle$$

- b) In diesem Fall folgt die Linearität des Operators fast unmittelbar aus der Linearität des Raumes. Wir definieren $a|v_1\rangle + b|v_2\rangle = |v\rangle$ mit $|v_1\rangle = |u_1\rangle + |w_1\rangle$, $|v_2\rangle = |u_2\rangle + |w_2\rangle$ sowie $|v\rangle = |u\rangle + |w\rangle = a|u_1\rangle + b|u_2\rangle + a|w_1\rangle + b|w_2\rangle$

Wenn P linear sein soll muss gelten

$$P(a|v_1\rangle + b|v_2\rangle) = aP|v_1\rangle + bP|v_2\rangle$$

Wenn wir also Einsetzen erhalten wir links

$$P(a|v_1\rangle + b|v_2\rangle) = P|v\rangle = |w\rangle = a|w_1\rangle + b|w_2\rangle$$

sowie rechts

$$aP|v_1\rangle + bP|v_2\rangle = a|w_1\rangle + b|w_2\rangle$$

das gleiche Ergebnis. Also ist P linear.

Dass $P^2 = P$ ist leichts erkennbar

$$P^2|v\rangle = P|w\rangle = |w\rangle = P|v\rangle \Rightarrow P^2 = P$$

Um die Eigenräume zu finden probieren wir einfach die drei in Frage kommenden Vektorräume U , V und W aus:

V : V ist offensichtlich kein Eigenraum da für keinen Eigenwert α die Eigenwertgleichung

$$P|v\rangle = |w\rangle = \alpha(|u\rangle + |w\rangle)$$

allgemein nicht erfüllbar ist.

U: Die Eigenwertgleichung

$$P|u\rangle = |0\rangle = \alpha|u\rangle$$

ist für den Eigenwert $\alpha = 0$ erfüllt. U ist somit ein Eigenraum.

W: Die Eigenwertgleichung

$$P|w\rangle = |w\rangle = \alpha|w\rangle$$

ist für den Eigenwert $\alpha = 1$ erfüllt und es handelt sich bei W somit auch um einen Eigenraum.

c) Wir entwickeln P in eine Doppelreihe und machen uns zunutze, dass $P|i\rangle = 0 \forall i \leq m$

$$EPE = \sum_{i,j=1}^n |i\rangle\langle i|P|j\rangle\langle j| = \underbrace{\sum_{i,j=1}^m |i\rangle\langle i|P|j\rangle\langle j|}_{=0} + \underbrace{\sum_{i,j=m+1}^n |i\rangle\langle i|P|j\rangle\langle j|}_{=\delta_{ij}|i\rangle\langle j|}$$

$$P_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & j > m \\ 0 & j \leq m \end{cases}$$

Also eine Diagonalmatrix, bei denen die Diagonal-Elemente der Zeilen / Spalten mit Index $i, j \leq m$ null sind, ansonsten 1.

Jeder Operator mit diagonalen Matrixdarstellung lässt die Unterräume invariant:

$$A_{ij} = \alpha_{ij}\delta_{ij} \quad \text{mit} \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{C}$$