

Theoretische Physik E im WS 07/08
 Übungsblatt 6
 Gruppe P

Philipp Jung

4. Dezember 2007

Aufgabe 13: $SU(2)$ und $O(2,1)$

- a) Hier sind nur drei der neun möglichen Kommutatoren aufgelistet, weswegen wir nicht wirklich alle Strukturkonstanten k_{ab}^c bestimmen können. Unter der Annahme, dass alle λ_i mit sich selbst kommutieren gilt jedoch:

$$k_{ab}^c = \begin{cases} -\epsilon_{abc} & a \neq 3, b \neq 3 \\ \epsilon_{abc} & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit sind die k_{ab}^c nicht total antisymmetrisch (das wäre $k_{ab}^c = \epsilon_{abc}$) und da laut letztem Übungsblatt gilt, dass aus Kompaktheit der zu Grunde liegenden Lie Gruppe total antisymmetrische k_{ab}^c folgen, ist im Umkehrschluss diese Gruppe nicht kompakt. Eine 2x2 Darstellung lässt sich leicht finden, wenn man sich die nächste Teilaufgabe ansieht: dort wird gezeigt, dass die λ_i die Drehimpulsalgebra erfüllen, weswegen eine Darstellung für sie die Pauli Matrizen σ_i sind. Wenden wir dies nun auf unser Problem an und nennen unsere Darstellungsmatrizen $\tilde{\sigma}_i$:

$$\lambda_1 = -i\lambda'_1 \rightarrow \tilde{\sigma}_1 = -i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -i\lambda'_2 \rightarrow \tilde{\sigma}_2 = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \lambda'_3 \rightarrow \tilde{\sigma}_3 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Um die Vertauschungsrelationen zu erfüllen müssen wir die endgültigen Matrizen σ_i^* noch mit einem Faktor $\frac{1}{2}$ versehen.

$$\sigma_1^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die σ_i^* sind nun geeignete Darstellung dieser Algebra.

- b) Wir setzen ein und prüfen:

$$[\lambda'_1, \lambda'_2] = [i\lambda_1, i\lambda_2] = i\lambda_3 = i\lambda'_3$$

$$[\lambda'_2, \lambda'_3] = [i\lambda_2, \lambda_3] = -\lambda_1 = i\lambda'_1$$

$$[\lambda'_3, \lambda'_1] = [\lambda_3, \lambda_1] = -\lambda_2 = i\lambda'_2$$

etc. also gilt

$$[\lambda'_a, \lambda'_b] = i\epsilon_{abc}\lambda'_c$$

Was genau den Vertauschungsrelationen des Bahndreimpulses \vec{L} entspricht:

$$[L_a, L_b] = i\epsilon_{abc}L_c$$

Aufgabe 14: Teilchenoszillation der neutralen Kaonen

- a) Wir interessieren uns hier für die Zeitentwicklung eines Systems, dessen Hamiltonoperator eine Linearkombination zwischen einem Term der starken und der schwachen Wechselwirkung. In dieser Aufgabeneinstellung werden jedoch nur Zerfälle behandelt, die durch die schwache Wechselwirkung hervorgerufen werden, weswegen wir in der **Zeitentwicklung** den H_{stark} Term nicht beachten müssen (Wir nennen ab jetzt $H = H_{schwach}$). Da H nicht zeitabhängig ist, ist der Zeitentwicklungsoperator e^{-iHt} ($\hbar = 1$). Um nun die Zeitentwicklung ordentlich ausrechnen zu können brauchen wir zunächst eine Basis, in der H diagonal ist. Hier ist in der $|K_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\bar{K}_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ -Basis gegeben. Wir müssen also zunächst Eigenwerte und Vektoren suchen:

$$\det |H - \lambda 1| = \lambda^2 + \left(A - \frac{1}{2}i\gamma_1\right)^2 - \left(A - \frac{1}{2}i\gamma_2\right)^2 - 2\lambda \left(A - \frac{1}{2}i\gamma_1\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 2A - \frac{i}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \quad \lambda_2 = \frac{i}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)$$

Die Eigenvektoren finden wir dann über

$$(H - \lambda_i 1) \cdot \vec{x} = 0$$

so finden wir als normierte Eigenvektoren des Hamiltonoperators

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_0\rangle + |\bar{K}_0\rangle) \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_0\rangle - |\bar{K}_0\rangle)$$

Das können wir natürlich auch umgekehrt darstellen:

$$|K_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1\rangle + |K_2\rangle) \quad |\bar{K}_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1\rangle - |K_2\rangle)$$

Nun können wir die Zeitentwicklung aufschreiben:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt} |K_0\rangle = e^{-iHt} \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1\rangle + |K_2\rangle)$$

Dies können wir weiter ausführen, da wir ja die Eigenwerte von $|K_1\rangle, |K_2\rangle$ (nämlich λ_1, λ_2 s.O.) kennen:

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\lambda_1 t} |K_1\rangle + e^{-i\lambda_2 t} |K_2\rangle)$$

Um nun $|\langle \bar{K}_0 | \Psi(t) \rangle|^2$ zu erhalten berechnen wir zunächst:

$$\langle \bar{K}_0 | \Psi(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle K_1 | - \langle K_2 |) |\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2}(e^{-i\lambda_1 t} - e^{-i\lambda_2 t})$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{-2iAt} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)t} - e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)t} \right)$$

Wir multiplizieren mit den konjugiert komplexen Element und erhalten:

$$|\langle \bar{K}_0 | \Psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} e^{-\gamma_1 t} \left(\underbrace{e^{\gamma_2 t} + e^{-\gamma_2 t}}_{=2\cosh(\gamma_2 t)} - \underbrace{e^{-2iAt} - e^{2iAt}}_{=-2\cos(2At)} \right) = \frac{1}{2} e^{-\gamma_1 t} (\cosh(\gamma_2 t) - \cos(2At))$$

Die Wahrscheinlichkeit $|\langle K_0 | \Psi(t) \rangle|^2$ erhält man nun entweder durch direktes ausrechnen oder indem man $|\langle \bar{K}_0 | \Psi(t) \rangle|^2$ von der Gesamtwahrscheinlichkeit $|\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle|^2$ abzieht. Das werden wir tun weil dieser Weg und auch gleich Aufschluss über die zeitlich abfallende Normierung des Zustandes gibt. Demnach berechnen wir nun also zunächst $|\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle|^2$:

$$|\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2} [e^{i\lambda_1 t} \langle K_1 | + e^{i\lambda_2 t} \langle K_2 |] \cdot [e^{(i\lambda_1)^* t} | K_1 \rangle + e^{(i\lambda_2)^* t} | K_2 \rangle] = e^{-\gamma_1 t} \cosh(\gamma_2 t)$$

Und damit ist die Wahrscheinlichkeit ein $|K_0\rangle$ vorzufinden:

$$|\langle K_0 | \Psi(t) \rangle|^2 = |\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle|^2 - |\langle \bar{K}_0 | \Psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2} e^{-\gamma_1 t} (\cosh(\gamma_2 t) + \cos(2At))$$

- b) Hier müssen wir zunächst die gegebenen Werte so umrechnen, dass sie in unsere Formeln passen. gegeben sind die Lebensdauern von $|K_1\rangle$ und $|K_2\rangle$ diese fallen jeweils mit $e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)t}$ für $|K_1\rangle$ bzw. $e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)t}$ für $|K_2\rangle$ ab. Nach der Formel auf dem Blatt muss also gelten:

$$\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) = \frac{1}{\tau_1} \quad \text{bzw} \quad \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) = \frac{1}{\tau_2}$$

Die beiden Gleichungen kann man addieren oder subtrahieren um γ_1 und γ_2 zu erhalten:

$$\gamma_1 = \tau_1^{-1} - \tau_2^{-1} \quad \gamma_2 = \tau_1^{-1} + \tau_2^{-1}$$

Nun bleibt nur noch Δm was laut Blatt der Realteil der Differenz der beiden (oben berechneten) Energieeigenwerte sein soll also:

$$\Delta m = \text{Re}(E_1 - E_2) = \text{Re}(2A - i\gamma_1) = 2A \stackrel{!}{=} \frac{1}{2\tau_1} \Rightarrow A = \frac{1}{4\tau_1}$$

Wenn man nun die Werte einsetzt kann man es in dem geforderten Bereich ($t = 0$ bis $t = 15\tau_1$) plotten:

